תאריך הבחינה:	8.8.2024
המרצה:	דר' יקיר ברצ'נקו
שם הקורס:	מודלים של רגרסיה ליניארית
מספר קורס:	364-1-1061
משך הבחינה:	שתי שעות
חומר עזר:	מחשבון, 5 דפי נוסחאות, טבלאות סטטיסטיות

מיועד לתלמידי הנדסת תעשיה וניהול.

שנה: 2024 סמסטר: ב' מועד: א'

הנחיות חשובות:

א. במבחן זה שלוש שאלות

ב. יש לפתור את כל השאלות, סך הנקודות עשוי להגיע ל108, אך הציון הסופי המקסימלי במבחן הינו 100.

ג. יש ללוות את דרך הפתרון בהסברים מילוליים קצרים

ד. ניתן להשתמש בכל הנוסחאות והתוצאות שפותחו או הוצגו בכיתה ואין צורך להוכיחן מחדש אלא אם כן זה נדרש במפורש

יש לכתוב את כל התשובות במחברת ולא על גיליון המבחן.

<u>שאלה 1 (39 נקודות)</u>

כימאים אספו נתונים לגבי תגובה כימית, ולאחר הרצת רגרסיה לינארית הם קיבלו את התוצאות הבאות עבור המודל:
(שימו לב שחלק מהערכים בפלט נמחקו!)

```
Call:
lm(formula = chem.data$y ~ chem.data$x1 + chem.data$x2 + chem.data$x3
+
    chem.data$x4)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-9.9958 -3.3092 -0.2419  3.3924 10.5668

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   5.89453    4.32508   ???     ???
chem.data$x1 -0.47790    0.34002   ???     ???
chem.data$x2  0.18271    0.01718   ???     ???
chem.data$x3 35.40284   11.09960   ???     ???
chem.data$x4  5.84391    2.90978   ???     ???
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 5.014 on 57 degrees of freedom
Multiple R-squared:  ??,    Adjusted R-squared:  ??
F-statistic: 31.92 on 4 and 57 DF,  p-value: ???
```

א. חשבו את הp-value עבור המקדם של x2. הסבירו את תשובתכם.

ב. חשבו רווח סמך ברמה של 99% עבור המקדם של x4. הסבירו את תשובתכם.

ג. מיצאו את R^2. נמקו.

שאלה 2 (39 נקודות)

ענו על הסעיפים הבאים שמתייחסים לאיור 1.

א. עבור הנתונים שבפאנל a השמאלי, איזה מודל רגרסיה הייתם מציעים על מנת לתאר את התצפיות? נסחו את המודל ונמקו בקצרה.

ב. ארי החליט להתאים לנתונים שבפאנל a מודל רגרסיה פשוטה (עם משתנה בלתי-תלוי יחיד, "השכלה"). כיצד יראה תרשים שאריות מול "השכלה"? ארי החליט להוסיף תרשים שאריות נוסף: שאריות מול "מגדר". כיצד יראה תרשים זה? תארו (רצוי בעזרת שני איורים) את שני התרשימים והסבירו בקצרה.

ג. ברי החליט להתאים לנתונים שבפאנל b מודל רגרסיה פשוטה (עם משתנה בלתי-תלוי יחיד, "השכלה"). כיצד יראה תרשים שאריות מול "השכלה"? ברי החליט להוסיף תרשים שאריות נוסף: שאריות מול "מגדר". כיצד יראה תרשים זה? תארו (רצוי בעזרת שני איורים) את שני התרשימים והסבירו בקצרה.

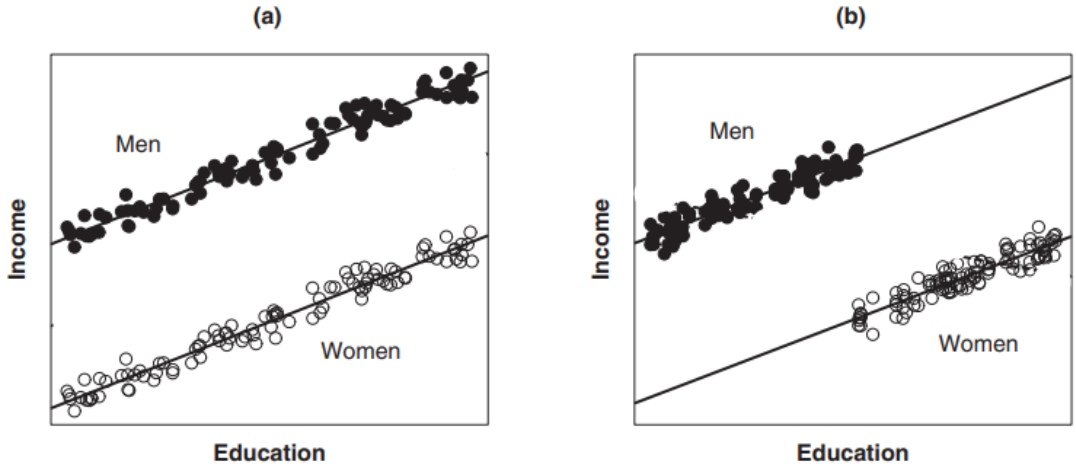


Figure 1 Idealized data representing the relationship between income and education for populations of men (filled circles) and women (open circles).

פיתרון:

סעיף א:

המודל המתאים הינו מודל עם חותך שונה עבור גברים או נשים, ז"א:

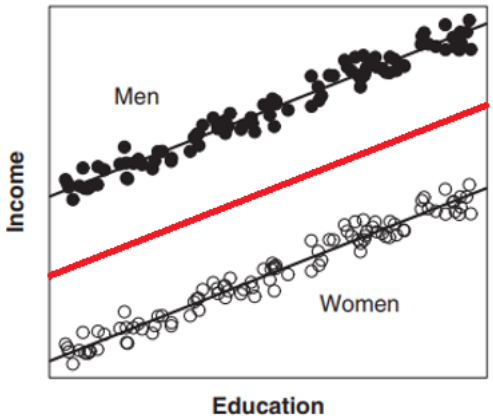
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 g_i + \epsilon_i$$

כאשר x_i הינו ההשכלה של התצפית ה-i ו-g_i הינו משתנה בינארי (1\0) המתאר את המיגדר של התצפית (אישה\גבר).

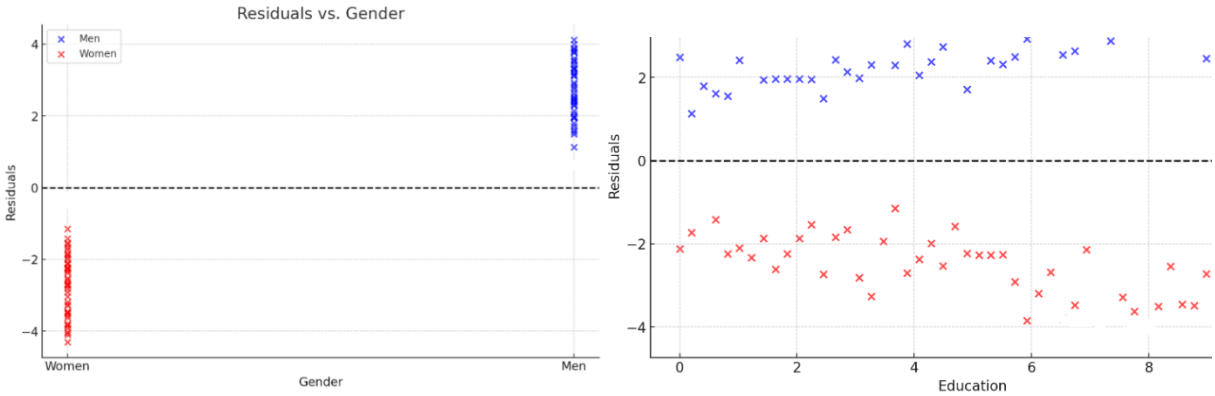
(הערה: ע"ס האיור נראה שאין צורך בגורם נוסף עבור אינטראקציה, אבל תשובות שנימקו את ההוספה התקבלו גם כן.)

סעיף ב:

קו הרגרסיה יעבור בין שתי קבוצות התצפיות (ראו את הקו האדום שבאיור למטה)

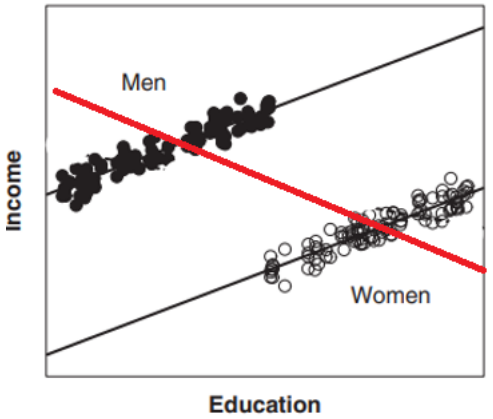


ובהתאם, תרשימי השאריות יראו בערך כך:

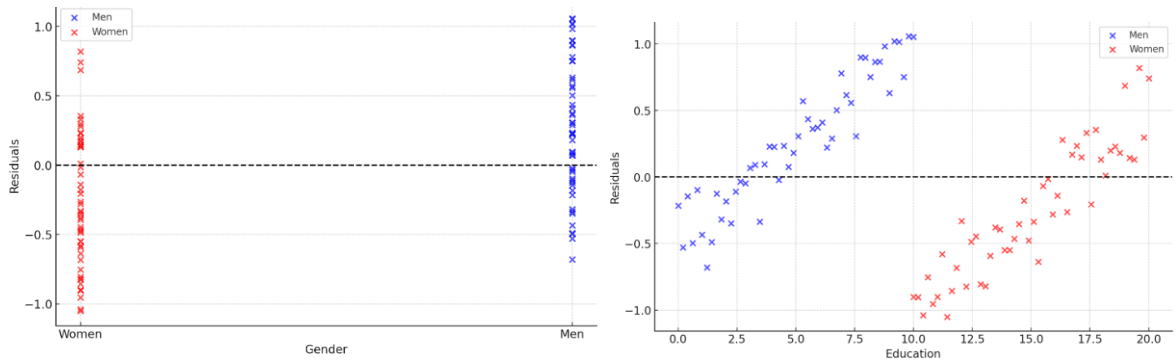


סעיף ג:

קו הרגרסיה יעבור בין מרכזי שתי קבוצות התצפיות (ראו את הקו האדום שבאיור למטה)



ובהתאם, תרשימי השאריות יראו בערך כך:



<u>שאלה 3 (30 נקודות)</u>

יהי $\hat{\beta}$ אומד הריבועים הפחותים עבור הפרמטרים של מודל רגרסיה לינארית מרובה (זאת אומרת כאשר כרגיל:

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad (y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^K \text{ and } X \in \mathbb{R}^{n\times K})$$

וכל ε_i בלתי-תלוי באחרים, עם תוחלת 0 ושונות σ^2).

יהי $\tilde{\beta}$ אומד לינארי **אחר** חסר-הטיה, $\tilde{\beta} = Cy$ (כאשר C היא מטריצת קבועים בגודל $k \times n$).

א. הסבירו בקצרה מה זה <u>אומד לינארי</u>, והאם ניתן לייצג את C בתור $C = (X^TX)^{-1}X^T + D$, כאשר D היא מטריצת קבועים כלשהי בגודל $k \times n$.

ב1. השלימו את מעברי השורה החסרים, והוסיפו נימוקים מתאימים היכן שצריך (הסימון I מייצג את מטריצת-היחידה):

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tilde{\beta}] &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= (I \quad + DX)\beta.
\end{aligned}$$

.

ב2. בסעיף ב1', מה ניתן להסיק על המכפלה DX על-סמך הנתון ש-$\tilde{\beta}$ הינו חסר-הטיה?

ג1. השלימו את מעברי השורה החסרים, נמקו והעזרו במסקנות סעיף ב' היכן שצריך:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \mathrm{Var}\left(\widehat{\beta}\right) + \sigma^2 DD^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

ג2. העזרו בתוצאות הסעיפים הקודמים ונמקו בקצרה מדוע ל-$\hat{\beta}$ יש את השונות הקטנה ביותר מבין כל האומדים הלינארים חסרי-ההטיה האפשריים.

פיתרון:

סעיף א: אומד לינארי הוא אומד שהינו סכום משוקלל (בעזרת קבועים כלשהם) של התצפיות. ז"א שעבור $\widehat{\beta_J}$ קיימים קבועים $\{c_{i,j}\}$ כך ש:

$$\widehat{\beta_J} = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} y_i$$

ובכתיב וקטורי:

$$\hat{\beta} = Cy$$

אם נגדיר מטריצה D כך:

$$D = C - (X^T X)^{-1} X^T$$

(כאשר באגף ימין יש אך ורק קבועים ידועים) אז בודאי שמתקיים

$$C = (X^T X)^{-1} X^T + D$$

סעיפים ב-ג:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\tilde{\beta}\right] &= \mathrm{E}[Cy] \\
&= \mathrm{E}\left[\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} + D\right)(X\beta + \varepsilon)\right] \\
&= \left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} + D\right)X\beta + \left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} + D\right)\mathrm{E}[\varepsilon] \\
&= \left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} + D\right)X\beta && \mathrm{E}[\varepsilon] = 0 \\
&= (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}X\beta + DX\beta \\
&= (I_K + DX)\beta.
\end{aligned}
$$

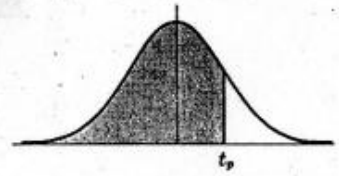
Therefore, since β is **un**observable, $\tilde{\beta}$ is unbiased if and only if $DX = 0$. Then:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) &= \mathrm{Var}(Cy) \\
&= C\,\mathrm{Var}(y)C^{\mathrm{T}} \\
&= \sigma^2 CC^{\mathrm{T}} \\
&= \sigma^2\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}} + D\right)\left(X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + D^{\mathrm{T}}\right) \\
&= \sigma^2\left((X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}X(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + (X^{\mathrm{T}}X)^{-1}X^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} + DX(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + DD^{\mathrm{T}}\right) \\
&= \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1}(DX)^{\mathrm{T}} + \sigma^2 DX(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + \sigma^2 DD^{\mathrm{T}} \\
&= \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} + \sigma^2 DD^{\mathrm{T}} && DX = 0 \\
&= \mathrm{Var}\left(\widehat{\beta}\right) + \sigma^2 DD^{\mathrm{T}} && \sigma^2(X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \mathrm{Var}\left(\widehat{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Since DD^{T} is a positive semidefinite matrix, $\mathrm{Var}(\tilde{\beta})$ exceeds $\mathrm{Var}\left(\widehat{\beta}\right)$ by a positive semidefinite matrix.

TABLE

PERCENTILE VALUES (t_p) FOR STUDENT'S t DISTRIBUTION
with n degrees of freedom
(shaded area = p)



n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

טבלת התפלגות F עבור $\alpha = 0.05$

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.448	199.5	215.707	224.583	230.162	233.99	236.768	238.883	240.543	241.882	243.91	245.95	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.314
2	18.5128	19	19.1643	19.2468	19.2964	19.33	19.3532	19.371	19.3848	19.3959	19.413	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.128	9.552	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.572	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.944	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.717	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.786	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.365
6	5.9874	5.143	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.737	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.257	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.103	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845	2.774	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.982	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.609	2.5705	2.5309	2.4901	2.448	2.4045
12	4.7472	3.885	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.341	2.2962
13	4.6672	3.806	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.739	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.682	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.494	3.634	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.592	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.104	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.555	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.522	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.878
20	4.3512	3.493	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.467	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757	2.096	2.054	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.443	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.938	1.8894	1.838	1.7831
23	4.2793	3.422	3.028	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.005	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.757
24	4.2597	3.403	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.939	1.892	1.8424	1.7896	1.733
25	4.2417	3.385	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.711
26	4.2252	3.369	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.901	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.21	3.354	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.196	3.34	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.236	2.19	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.183	3.328	2.934	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.316	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.232	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.15	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.748	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.072	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.429	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.996	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.394	1.318	1.2214	1

טבלת F עבור $\alpha = 0.025$

120	60	40	30	24	20	15	12	10	9	8	7	6	5	4	3	2	$df_1=1$	/
1014	1010	1006	1001	997.2	993.1	984.9	976.7	968.6	963.3	956.7	948.2	937.1	921.8	899.6	864.2	799.5	647.8	$df_2=1$
39.49	39.48	39.47	39.47	39.46	39.45	39.43	39.41	39.4	39.39	39.37	39.36	39.33	39.3	39.25	39.17	39	38.51	2
13.95	13.99	14.04	14.08	14.12	14.17	14.25	14.34	14.42	14.47	14.54	14.62	14.73	14.88	15.1	15.44	16.04	17.44	3
8.309	8.36	8.411	8.461	8.511	8.56	8.657	8.751	8.844	8.905	8.98	9.074	9.197	9.365	9.605	9.979	10.65	12.22	4
6.069	6.123	6.175	6.227	6.278	6.329	6.428	6.525	6.619	6.681	6.757	6.853	6.978	7.146	7.388	7.764	8.434	10.01	5
4.904	4.959	5.012	5.065	5.117	5.168	5.269	5.366	5.461	5.523	5.6	5.696	5.82	5.988	6.227	6.599	7.26	8.813	6
4.199	4.254	4.309	4.362	4.415	4.467	4.568	4.666	4.761	4.823	4.899	4.995	5.119	5.285	5.523	5.89	6.542	8.073	7
3.728	3.784	3.84	3.894	3.947	4	4.101	4.2	4.295	4.357	4.433	4.529	4.652	4.817	5.053	5.416	6.06	7.571	8
3.392	3.449	3.505	3.56	3.614	3.667	3.769	3.868	3.964	4.026	4.102	4.197	4.32	4.484	4.718	5.078	5.715	7.209	9
3.14	3.198	3.255	3.311	3.365	3.419	3.522	3.621	3.717	3.779	3.855	3.95	4.072	4.236	4.468	4.826	5.456	6.937	10
2.944	3.004	3.061	3.118	3.173	3.226	3.33	3.43	3.526	3.588	3.664	3.759	3.881	4.044	4.275	4.63	5.256	6.724	11
2.787	2.848	2.906	2.963	3.019	3.073	3.177	3.277	3.374	3.436	3.512	3.607	3.728	3.891	4.121	4.474	5.096	6.554	12
2.659	2.72	2.78	2.837	2.893	2.948	3.053	3.153	3.25	3.312	3.388	3.483	3.604	3.767	3.996	4.347	4.965	6.414	13
2.552	2.614	2.674	2.732	2.789	2.844	2.949	3.05	3.147	3.209	3.285	3.38	3.501	3.663	3.892	4.242	4.857	6.298	14
2.461	2.524	2.585	2.644	2.701	2.756	2.862	2.963	3.06	3.123	3.199	3.293	3.415	3.576	3.804	4.153	4.765	6.2	15
2.383	2.447	2.509	2.568	2.625	2.681	2.788	2.889	2.986	3.049	3.125	3.219	3.341	3.502	3.729	4.077	4.687	6.115	16
2.315	2.38	2.442	2.502	2.56	2.616	2.723	2.825	2.922	2.985	3.061	3.156	3.277	3.438	3.665	4.011	4.619	6.042	17
2.256	2.321	2.384	2.445	2.503	2.559	2.667	2.769	2.866	2.929	3.005	3.1	3.221	3.382	3.608	3.954	4.56	5.978	18
2.203	2.27	2.333	2.394	2.452	2.509	2.617	2.72	2.817	2.88	2.956	3.051	3.172	3.333	3.559	3.903	4.508	5.922	19
2.156	2.223	2.287	2.349	2.408	2.465	2.573	2.676	2.774	2.837	2.913	3.007	3.128	3.289	3.515	3.859	4.461	5.872	20
2.114	2.182	2.246	2.308	2.368	2.425	2.534	2.637	2.735	2.798	2.874	2.969	3.09	3.25	3.475	3.819	4.42	5.827	21
2.076	2.145	2.21	2.272	2.332	2.389	2.498	2.602	2.7	2.763	2.839	2.934	3.055	3.215	3.44	3.783	4.383	5.786	22
2.041	2.111	2.176	2.239	2.299	2.357	2.467	2.57	2.668	2.731	2.808	2.902	3.023	3.184	3.408	3.751	4.349	5.75	23
2.01	2.08	2.146	2.209	2.269	2.327	2.437	2.541	2.64	2.703	2.779	2.874	2.995	3.155	3.379	3.721	4.319	5.717	24
1.981	2.052	2.118	2.182	2.242	2.301	2.411	2.515	2.614	2.677	2.753	2.848	2.969	3.129	3.353	3.694	4.291	5.686	25
1.954	2.026	2.093	2.157	2.217	2.276	2.387	2.491	2.59	2.653	2.729	2.824	2.945	3.105	3.329	3.67	4.266	5.659	26
1.93	2.002	2.069	2.133	2.195	2.253	2.364	2.469	2.568	2.631	2.707	2.802	2.923	3.083	3.307	3.647	4.242	5.633	27
1.907	1.98	2.048	2.112	2.174	2.232	2.344	2.448	2.547	2.611	2.687	2.782	2.903	3.063	3.286	3.626	4.221	5.61	28
1.886	1.959	2.028	2.092	2.154	2.213	2.325	2.43	2.529	2.592	2.669	2.763	2.884	3.044	3.267	3.607	4.201	5.588	29
1.866	1.94	2.009	2.074	2.136	2.195	2.307	2.412	2.511	2.575	2.651	2.746	2.867	3.027	3.25	3.589	4.182	5.568	30
1.724	1.803	1.875	1.943	2.007	2.068	2.182	2.288	2.388	2.452	2.529	2.624	2.744	2.904	3.126	3.463	4.051	5.424	40
1.581	1.667	1.744	1.815	1.882	1.945	2.061	2.169	2.27	2.334	2.412	2.507	2.627	2.786	3.008	3.343	3.925	5.286	60
1.433	1.53	1.614	1.69	1.76	1.825	1.945	2.055	2.157	2.222	2.299	2.395	2.515	2.674	2.894	3.227	3.805	5.152	120

בהצלחה!!!